数理解析研究所講究録
513巻 1984年 45-76

Kac-Moody Lie環とModular forms
—Kac-Petersonの仕事の紹介—

筑波大　森田 純（Jun Morita）
青学大　小池和彦（Kazuhiko Koike）
名大　田中洋平（Yôhei Tanaka）

ここでは Kac-Peterson（[6]）の仕事を，次の3つの式のLie環論的な説明を中心にして，紹介する。

$$\eta(12\tau)^2 = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k\geqq 2|l|}} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2-(6l+1)^2}{2}} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$\eta(8\tau)\eta(16\tau) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ k\geqq 3|l|}} (-1)^{k} q^{(2k+1)^2-32l^2} \quad \cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$\eta(4\tau)\eta(20\tau) = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ 2k\geqq l\geqq 0}} (-1)^{k} q^{\frac{5(2k+1)^2-(2l+1)^2}{4}} \quad \cdots\cdots (\mathrm{III})$$

ここで $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ $(q=e^{2\pi i\tau})$ はDedekindのη-関数。これらの式の整数論的な意味については，味村-石井-平松氏の記事を参照されたい。

Affine Lie環の表現論では、standard module $L(\Lambda)$ の weight multiplicity の null-root 方向への母関数 $b^{\Lambda}_{\lambda}(q)$ を求める事が問題になる。Kac と Peterson は、この母関数に q の適当な分数巾をかけた $C^{\Lambda}_{\lambda}(q) = q^{S_{\Lambda}(\lambda)} b^{\Lambda}_{\lambda}(q)$ を string function と呼んで、指標公式から、あるテータ関数の交代和を基本的な交代和で割ったものをテータ関数で展開した時の係数としてこの string function を捉えられる事に着目した。そしてテータ関数の変換公式から string function の変換公式を導き、これを利用して多くの例を計算している。一方 $A_1^{(1)}$ 型の Lie 環に対して、その Kostant の分割関数を具体的に計算し、その結果から $A_1^{(1)}$ の string function が Hecke の indefinite modular form で表わせる事を示した。

式(I),(II),(III) は $A_1^{(1)}$ のある string function の indefinite modular form による表示式として得られる。

§1 で Affine Lie環 $A_1^{(1)}$ について基本的な事をまとめ、$A_1^{(1)}$ の Kostant の分割関数を計算する。(Th.1) §2 では string function の理論を $A_1^{(1)}$ について述べ (Th.2)、(I)(II)(III)に現われる string function を計算する。((2-I), (2-II), (2-III))

§3 では $A_1^{(1)}$ の string function $C^{\Lambda}_{\lambda}(\tau)$ について、$\eta(\tau)^3 C^{\Lambda}_{\lambda}(\tau)$ が indefinite modular form になる事を示し (Th.3)、§2 の例とあわせて(I)(II)(III)式を導く。

§1. Affine Lie 環 $A_1^{(1)}$

1-1. $A_1^{(1)}$の構成，root 系

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0 \}$とする。次の無限次元Lie環$\mathfrak{g}$を$A_1^{(1)}$型のaffine Lie 環と呼ぶ。

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}\cdot d \oplus \mathbb{C}\cdot c \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}[z,z^{-1}]$$

交換関係

$$\begin{cases} [c,\mathfrak{g}] = 0, \quad [d, X\otimes z^m] = m\, X\otimes z^m & \left(\begin{matrix} X\in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \\ m\in\mathbb{Z} \end{matrix}\right) \\ [X\otimes z^m, Y\otimes z^n] = m\,\delta_{m,-n}\,\mathrm{tr}(XY)\,c + [X,Y]\otimes z^{m+n} & \\ \qquad (X,Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),\quad m,n\in\mathbb{Z}) & \end{cases}$$

$X \mapsto X\otimes 1$により$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$は$\mathfrak{g}$に含まれる。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$の基底 $h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$として．

$h_0 = c - h_1$, $\quad e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$, $f_0 = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$とおく。

(ここで $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[z,z^{-1}]$を$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}[z,z^{-1}]) = \{ A\in M_2(\mathbb{C}[z,z^{-1}]) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$と自然に同一視した。)

$$\mathfrak{h} \underset{def.}{=} \mathbb{C}\cdot d + \mathbb{C}\cdot c + \mathbb{C} h_1 \quad : \text{Cartan部分環}$$

とおき $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\alpha_0(c) = 0,\ \alpha_0(d) = 1,\ \alpha_0(h_1) = -2$$
$$\alpha_1(c) = 0,\ \alpha_1(d) = 0,\ \alpha_1(h_1) = 2$$

で定める。$\Pi = \{\alpha_0,\alpha_1\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{h_0, h_1\} \subset \mathfrak{h}$とおけば $\Pi, \Pi^\vee$の元はそれぞれ一次独立である。

$c_{ij} = \alpha_j(h_i) \quad (i,j=0,1)$ とし

$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を $A_1^{(1)}$ 型のCartan行列と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}$ と $\{e_i, f_i\}_{i=0,1}$ で生成され、次の関係式を基本関係式として持っている。

$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0 & \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i & \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i & (h \in \mathfrak{h},\ i=0,1) \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i & (i,j=0,1) \\ (\mathrm{ad}\, e_i)^{-c_{ij}+1}(e_j) = 0 & \\ (\mathrm{ad}\, f_i)^{-c_{ij}+1}(f_j) = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Cartan行列 C が対称なので $\mathfrak{g}$ の自己同型 φ で

$\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\varphi(h_i) = h_{1-i}$, $\varphi(e_i) = e_{1-i}$, $\varphi(f_i) = f_{1-i}$

となるものが存在する。$\sigma \underset{def.}{=} {}^t(\varphi|\mathfrak{h}) \in GL(\mathfrak{h}^*)$ とおく。

$\mathfrak{n}_+$: e_0 と e_1 で生成される subalgebra

$\mathfrak{n}_-$: f_0 と f_1 〃

とすれば

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ と直和分解される。実際

$$\mathfrak{n}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} z\,p(z) & q(z) \\ z\,r(z) & -z\,p(z) \end{pmatrix} \,\middle|\, p(z), q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

$$\mathfrak{n}_- = \left\{ \begin{pmatrix} z^{-1} p(z^{-1}) & z^{-1} q(z^{-1}) \\ r(z^{-1}) & -z^{-1} p(z^{-1}) \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q, r \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

$Q \underset{def.}{=} \mathbb{Z}\alpha_0 + \mathbb{Z}\alpha_1 \supset Q_+ \underset{def.}{=} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1$ とおく。

$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha \underset{def.}{=} \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X \ \ {}^\forall h \in \mathfrak{h}\}$$

と定める。$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ である。

$$\Delta \underset{def.}{=} \{0 \neq \alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

を root 系，$\Delta \ni \alpha$ を root，$\mathfrak{g}_\alpha$ を root 空間と呼ぶ.

$\delta = \alpha_0 + \alpha_1$ とおくと

$$\Delta = \{m\delta \mid 0 \neq m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_0 + m\delta \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_1 + m\delta \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

であり，対応する root 空間は それぞれ

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix} z^m & 0 \\ 0 & -z^m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z^{m+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & z^m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になる。

$$\Delta_+ \underset{def.}{=} \Delta \cap Q_+ = \{m\delta \mid m > 0\} \cup \{\alpha_0 + m\delta \mid m \geq 0\} \cup \{\alpha_1 + m\delta \mid m \geq 0\}$$

の各元を positive root と呼ぶ。$\Delta_- = -\Delta_+$ とおけば

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$$

$$\mathfrak{n}_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_\pm} \mathfrak{g}_\alpha \quad (\text{複号同順})$$

となる。

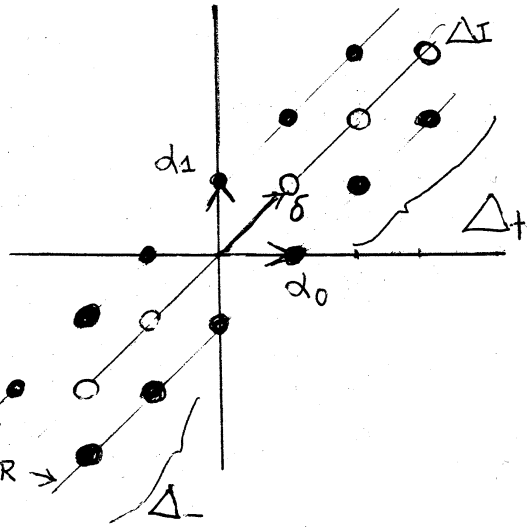
$i = 0, 1$ に対して $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を

$$r_i(\alpha) \underset{def.}{=} \alpha - \alpha(h_i)\alpha_i \quad (\alpha \in \mathfrak{h}^*)$$

と定める。

$$W \underset{def.}{=} \langle r_0, r_1 \rangle$$

を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群と呼ぶ。



Δ は W-不変であり

$\Delta_R \underset{def}{=} W(\Pi)$, $\Delta_I \underset{def}{=} \Delta \setminus \Delta_R$

とおけば

$\Delta_I \cup \{0\} = \mathbb{Z}\delta = \{\alpha \in Q \mid \alpha(h_0) = \alpha(h_1) = 0\}$

となる。Δ_I の元を null-root

δ を fundamental null-root

と呼ぶ。Δ_I の各元は W で固定される。

1-2. standard module, 指標公式

$$P \underset{def}{=} \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \ (i=0,1)\} \quad : \text{integral weights}$$

$$\cup$$

$$P_+ \underset{def}{=} \{\Lambda \in P \mid \Lambda(h_i) \geqq 0 \ (i=0,1)\} \quad : \text{dominant weights}$$

とおく。

$\Lambda \in P_+$ に対して次の性質をもつ $\mathfrak{g}$-module $L(\Lambda)$ が同型を除いて一意的に定まる。($L(\Lambda)$ は Λ を highest weight に持つ standard module と呼ばれる。)

$$\begin{cases} 0 \neq v_\Lambda \in L(\Lambda) \text{ があって } \quad h \cdot v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda, \ \mathfrak{n}_+ v_\Lambda = 0 \\ L(\Lambda) \text{ は既約な } \mathfrak{g}\text{-module} \end{cases}$$

この時 $L(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L(\Lambda)_\lambda$

$$L(\Lambda)_\lambda \underset{def}{=} \{v \in L(\Lambda) \mid h \cdot v = \lambda(h) v \ (\forall h \in \mathfrak{h})\}$$

と weight 空間に分解されて

$$P(\Lambda) \underset{def}{=} \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid L(\Lambda)_\lambda \neq 0\}$$

は $\Lambda - Q_+ = \{\Lambda - \mu \mid \mu \in Q_+\}$ に含まれる。そして weight の重複度 $m_\Lambda(\lambda) \underset{def}{=} \dim L(\Lambda)_\lambda$ は有限になる。特に $m_\Lambda(\Lambda) = 1$ である。そこで形式和

$$ch L(\Lambda) \underset{def}{=} \sum_{\lambda \in P(\Lambda)} m_\Lambda(\lambda) e^\lambda$$

を $L(\Lambda)$ の指標と呼ぶ。ここで e^λ は群環 $\mathbb{Z}[P]$ の元とし $ch L(\Lambda)$ を形式的巾級数環 $\mathbb{Z}[P][[e^{-d_0}, e^{-d_1}]]$ の元とみなす。$\rho \in P_+$ を $\rho(h_0) = \rho(h_1) = 1$, $\rho(d) = 0$ で定める。

$ch L(\Lambda)$ に対して次の公式が成り立つ。([4], [7])

Weyl-Kac の指標公式

$$ch L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det w \, e^{w(\Lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det w \, e^{w(\rho)}}$$

指標公式の分母をはらって係数を比較して次の式を得る。

Star-formula

$$m_\Lambda(\lambda) = \varepsilon - \sum_{w \neq 1} \det w \, m_\Lambda(\lambda + \rho - w(\rho)) \quad \text{---(1.1)}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \lambda + \rho \notin W(\Lambda + \rho) \text{ のとき} \\ \det w_0 & {}^\exists w_0 \in W \quad \lambda + \rho = w_0(\Lambda + \rho) \text{ のとき} \end{cases}$$

$w \neq 1$ の時 $0 \neq \rho - w(\rho) \in Q_+$ であり、star-formula は $m_\Lambda(\lambda)$ の帰納的な計算方法を与えている。

指標公式の分母は、次の積表示をもつ。（[4],[7]）

分母公式

$$\sum_{w\in W} \det w \, e^{w(\rho)} = e^{\rho} \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}$$

そこで

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}} = \sum_{\beta\in Q_+} K(\beta)\, e^{-\beta} \qquad \cdots\cdots (1.2)$$

と展開すると $m_\Lambda(\lambda)$ は $K(\beta)$ を用いて次の様に表わせる。

Kostant の公式

$$m_\Lambda(\lambda) = \sum_{w\in W} \det w \, K(w(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)) \qquad \cdots\cdots (1.3)$$

但し $\beta\in Q\setminus Q_+$ に対して $K(\beta)=0$ とする。このQ上の非負整数値関数を Kostant の分割関数と呼ぶ。

1-3. $A_1^{(1)}$ の Kostant 分割関数

$$\varphi(q) \underset{\text{def.}}{=} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

とおき

$$\frac{1}{\varphi(q)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(3)}(n)\, q^n$$

$n<0$ に対して $p^{(3)}(n)=0$ とおいて $\mathbb{Z}$ 上の関数 $p^{(3)}(n)$ を定義する。

Th.1 $K(\beta)$ を $A_1^{(1)}$ の分割関数とする。

$$K(m\alpha_0+n\alpha_1) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m-kn-\frac{k(k+1)}{2}\right) \cdots (1.4)$$

$$= -\sum_{k<0}(-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m-kn-\frac{k(k+1)}{2}\right) \cdots (1.5)$$

(証明) 1-1より $\Delta_+ = \{k\delta \mid k>0\} \cup \{k\delta + \alpha_0 \mid k \geqq 0\} \cup \{k\delta + \alpha_1 \mid k \geqq 0\}$

$\dim {}^{\forall}\mathfrak{g}_\alpha = 1$ なので (1.2) の左辺は

$$D = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty}(1-e^{-\alpha_1}e^{-k\delta})(1-e^{-\alpha_0}e^{-k\delta})\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{-k\delta})} \quad \text{—}(\star)$$

となる。Q上の affine 変換Rを

$$R(\beta) \underset{def.}{=} r_1(\beta) + \alpha_1$$

と定める。$R\cdot e^{\lambda} = e^{R(\lambda)}$ によりRをDに施す。

$$D' = D'(e^{-\alpha_0}, e^{-\alpha_1}) \underset{def.}{=} \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_1\}}(1-e^{-\alpha})}$$

とおけば

$$D = \frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} D'$$

$r_1(\Delta_+ \setminus \{\alpha_1\}) = \Delta_+ \setminus \{\alpha_1\}$ となるので

$$R\cdot D = \frac{e^{\alpha_1}}{1-e^{\alpha_1}} D'$$

$D' = \sum_{\beta\in Q} K'(\beta) e^{-\beta}$ と展開する。

$$D + R\cdot D = \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} + \frac{e^{\alpha_1}}{1-e^{\alpha_1}}\right) D'$$

$$= \sum_{m\geqq 0} a(m) e^{-m\alpha_0} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{n\alpha_1}\right) \quad \text{— }\ast)$$

ここで $a(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K'(m\alpha_0 + k\alpha_1)$

即ち $a(m)$ は $D'(e^{-\alpha_0}, e^{-\alpha_1})$ を $e^{-\alpha_0} \mapsto q$, $e^{-\alpha_1} \mapsto 1$ と specialize した時の q^m の係数である。$D'(q,1) = \frac{1}{\varphi(q)^3}$ だから

$a(m) = p^{(3)}(m)$.

一方 $D + R_1 D = \sum_{\beta \in Q} \left(K(\beta) e^{-\beta} + K(\beta) e^{-R_1 \beta} \right)$

$$= \sum_{\beta \in Q} \left(K(\beta) + K(R^*(\beta)) \right) e^{-\beta} \quad -(**)$$

ここで $R^*(\beta) = -R^{-1}(-\beta) = r_1(\beta) - \alpha_1$

$\beta = m\alpha_0 + n\alpha_1$ のとき $K(\beta) = K(m,n)$ と書けば、(*)と(**)の $e^{-\beta}$の係数を比較して

$$K(m,n) + K(m, 2m-n-1) = p^{(3)}(m) \quad —(ア)$$

(*)より $K(m,n) = K(n,m)$だから

$$K(m,n) + K(2n-m-1, n) = p^{(3)}(n) \quad —(イ)$$

(ア),(イ)を交互に適用して定理の式を得る。(証明終り)

§2 $A_1^{(1)}$の string function

$\Lambda \in P_+$ に対し $m = \Lambda(c)$を Λの(或いは$L(\Lambda)$の) level と呼ぶ。この時 $\forall \lambda \in P(\Lambda)$に対し $\lambda(c) = m$ である。また $\dim L(\Lambda) = 1$ となるのは level が 0 の時に限る。以後 level が正の時を考える。ここで $P(\Lambda)$の性質をいくつかあげておく。([4],[6],[7])

<u>Prop.1</u> (1) $\Lambda, \Lambda' \in P_+$, $\Lambda(h_i) = \Lambda'(h_i)$ $(i=0,1)$ ならば $\exists a \in \mathbb{C}$があって $\Lambda' = \Lambda + a\delta$ となり

$$P(\Lambda) \longrightarrow P(\Lambda') : \lambda \longmapsto \lambda' = \lambda + a\delta$$

は bijective な対応を与え、$m_\Lambda(\lambda) = m_{\Lambda'}(\lambda')$ $(\forall \lambda \in P(\Lambda))$

即ち $chL(\Lambda') = e^{a\delta} chL(\Lambda)$

(2) $P(\Lambda)$ は W で不変である。もっと詳しく $\forall w\in W, \forall\lambda\in P(\Lambda)$ に対して $m_\Lambda(\lambda)=m_\Lambda(w(\lambda))$

(3) $\lambda\in P(\Lambda) \Longleftrightarrow \Lambda-w(\lambda)\in Q_+ \quad (\forall w\in W)$

(4) $\lambda\in P(\Lambda)$ に対し $^\exists M\in\mathbb{Z}$ があって

$$\{n \mid \lambda+n\delta\in P(\Lambda)\}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq M\}$$

$$\max(\Lambda) \underset{\text{def.}}{=} \{\lambda\in P(\Lambda)\mid \lambda+\delta\notin P(\Lambda)\} \ : \text{maximal weights}$$

とおき、$\lambda\in\max(\Lambda)$ に対して δ 方向の母関数

$$b_\lambda^\Lambda \underset{\text{def.}}{=} \sum_{n\geq 0} m_\Lambda(\lambda-n\delta)\,e^{-n\delta}$$

を考えれば Prop.1 (4) より

$$\mathrm{ch}L(\Lambda)=\sum_{\lambda\in\max(\Lambda)} e^\lambda\, b_\lambda^\Lambda$$

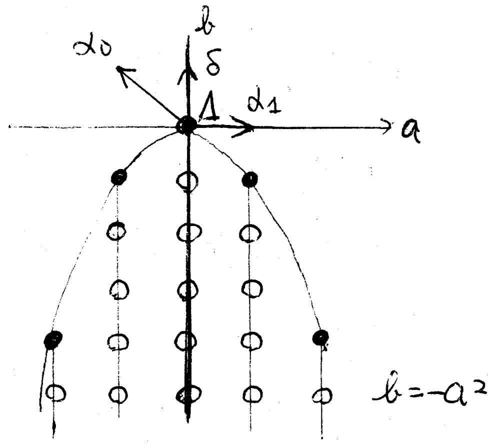
となる。

また Prop.1 (2), (4) より $\max(\Lambda)$ は W 不変で $\lambda\in\max(\Lambda), w\in W$ に対して $b_{w(\lambda)}^\Lambda=b_\lambda^\Lambda$ となる。

<u>例</u> Λ を $(\Lambda(h_0),\Lambda(h_1))$ で表示し b_λ^Λ を $b_{\lambda(h_0),\lambda(h_1)}^{\Lambda(h_0),\Lambda(h_1)}$ と書くことにする。Prop.1 (1) より $b_{n_0\,n_1}^{N_0\,N_1}$ は well-defined である。§1-1 の $\varphi\in Aut(\mathfrak{g})$ を考えれば $b_\lambda^\Lambda=b_{\sigma(\lambda)}^{\sigma(\Lambda)}$ 即ち $b_{n_0,n_1}^{N_0,N_1}=b_{n_1,n_0}^{N_1,N_0}$ となる。 $q=e^{-\delta}$ とおく。

$m=1 \quad \Lambda=(1,0)$

maximal weights は全て Λ に W-共役。(1.1) を用いて初めの数項を計算すると $b_{1,0}^{1,0}=1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\cdots$

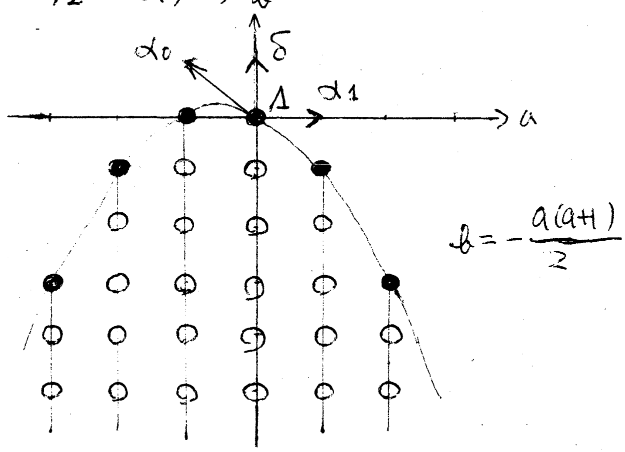


● : maximal weights

$b=-a^2$ の上の格子点

$m=2$

$\Lambda=(1,1)$

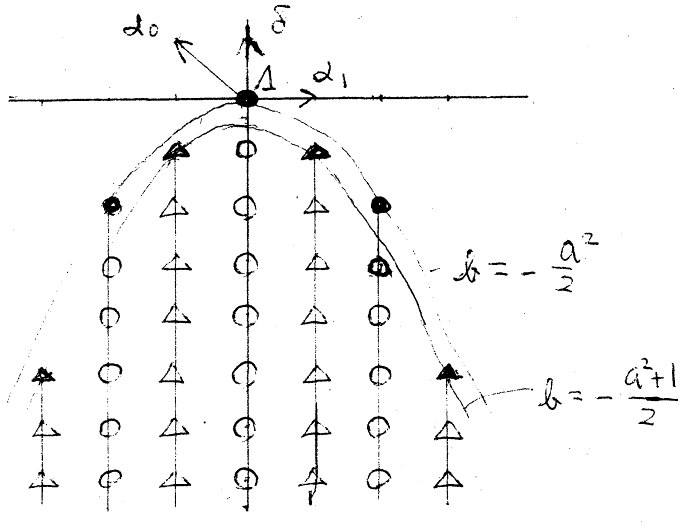


● : maximal weights

全て Λ に共役

$b^{11}_{11} = 1+2q+4q^2+8q^3+\cdots$

$\Lambda=(2,0)$



●, ▲ : maximal weights

● は Λ に共役

$b^{2,0}_{2,0} = 1+q+3q^2+5q^3+\cdots$

▲ は $\Lambda-\alpha_0$ に共役

$b^{2,0}_{0,2} = 1+2q+4q^2+7q^3+\cdots$

$t \underset{def.}{=} r_0 r_1$ とすれば $\langle t \rangle$ は無限巡回群で W の正規部分群.

$W = \langle t \rangle \rtimes \langle r_1 \rangle$: $r_1^2 = 1$, $r_1 t r_1 = t^{-1}$

となる。$det(t) = 1$, $det(r_1) = -1$ であるから, 指標公式を書き直すと

$$\sum_{\lambda \in max(\Lambda)/\langle t \rangle} b^{\Lambda}_{\lambda} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\lambda)} \Big) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\Lambda+\rho)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k r_1(\Lambda+\rho)}}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\rho)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k r_1(\rho)}}$$

―― (2.1)

$\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ を $\Lambda_0(d) = \Lambda_0(h_1) = 0$, $\Lambda_0(c) = 1$ で定めると, $\{\Lambda_0, \delta, \alpha_1\}$ が $\mathfrak{h}^*$ の基底になる。r_1, t^k $(k \in \mathbb{Z})$ の作用をこの基底を用いて書くと

$r_1 : \Lambda_0 \mapsto \Lambda_0$, $\delta \mapsto \delta$, $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し $\lambda(c) = m$, $\lambda(h_1) = n$ とすれば

$$t^k(\lambda) = \lambda - (mk^2 + nk)\delta + mk\alpha_1 \quad \text{---- (2.2)}$$

$\mathfrak{h}^*$ 上の metric $\langle\, , \rangle$ を $\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$, $\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$ $\langle \Lambda_0, \alpha_1 \rangle = \langle \delta, \alpha_1 \rangle = 0$, $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$ と定める。$\langle\, , \rangle$ は W で不変な metric になる。この $\langle\, , \rangle$ によって $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ を同一視すれば $d \leftrightarrow \Lambda_0$, $c \leftrightarrow \delta$, $h_1 \leftrightarrow \alpha_1$ となっている。(2.2) は

$$t^k(\lambda) = \frac{|\lambda|^2}{2m}\delta + m\Lambda_0 - m\Big(k + \frac{n}{2m}\Big)^2 \delta + m\Big(k + \frac{n}{2m}\Big)\alpha_1$$

となる。従って

<u>Lemma 1</u> $\mathfrak{h}$ の座標系を

$$\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{h} : (t, \tau, z) \leftrightarrow -2\pi i(tc + \tau d + z h_1)$$

と定め，e^{λ} を $\mathfrak{h}$ 上の関数 $h \mapsto e^{\lambda(h)}$ とみなす。
$\lambda \in P$, $\lambda(c) > 0$ の時 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\lambda)}$ は $Y = \{(t, \tau, z) \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ の上の正則関数を定める。 $m = \lambda(c)$, $n = \lambda(h_1)$ とのとき

$$\vartheta_{n,m}(t, \tau, u) \underset{\mathrm{def.}}{=} e^{-2\pi i m t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m (k + \frac{n}{2m})^2 \tau - 4\pi i m (k + \frac{n}{2m}) z}$$

(degree m のテータ関数)

とおけば

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{t^k(\lambda)} = e^{-2\pi i \frac{|\lambda|^2}{2m} \tau} \vartheta_{n,m}(t, \tau, z)$$

更に次が成り立つ（[6]）

<u>Prop.2</u>. $\Lambda \in P_+$ $\mathrm{ch}\, L(\Lambda)$ は Y 上の正則関数を定める。
Lemma 1 を用いて (2.1) の両辺を書き直すと，$\Lambda \in P_+$ が level $m = \Lambda(c)$ で $N_1 = \Lambda(h_1)$ のとき

$$\sum_{\lambda \in \max(\Lambda)/\langle t \rangle} C^{\Lambda}_{\lambda}(\tau)\, \vartheta_{\lambda(h_1), m}(t, \tau, z)$$

$$= \frac{\vartheta_{N_1+1, m+2}(t, \tau, z) - \vartheta_{N_1+1, m+2}(t, \tau, -z)}{\vartheta_{1,2}(t, \tau, z) - \vartheta_{1,2}(t, \tau, -z)} \quad \cdots (2.3)$$

ここで

$$C^{\Lambda}_{\lambda}(\tau) \underset{\mathrm{def.}}{=} q^{s_\Lambda(\lambda)}\, b^{\Lambda}_{\lambda}(q) \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

$$s_\Lambda(\lambda) \underset{\mathrm{def.}}{=} \frac{|\Lambda + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|\lambda|}{2m} - \frac{1}{8}$$

$C^{\Lambda}_{\lambda}(\tau)$ を string function と呼ぶ。

$\lambda(c)=m$ なる $\lambda\in P$ に対して，$\lambda\notin \max(\Lambda)$ の時にも C^{Λ}_{λ} を $C^{\Lambda}_{\lambda}=0$ として定義する。$\Lambda'=\Lambda+a\delta\ (a\in\mathbb{C})$ の時，Prop. 1 (1) から $\lambda\in \mathrm{Max}(\Lambda) \Leftrightarrow \lambda'=\lambda+a\delta\in \mathrm{Max}(\Lambda)$.
そして $S_{\Lambda'}(\lambda')=S_{\Lambda}(\lambda)$ であるから C^{Λ}_{λ} を $C^{\Lambda(h_0),\Lambda(h_1)}_{\lambda(h_0),\lambda(h_1)}$ と書いて $C^{N_0,N_1}_{n_0,n_1}$ は well-defined である。$\vartheta_{n,m}(t,\tau,z)=\vartheta_{-n,m}(t,\tau,z)$ であり，(2.2) より $\max(\Lambda)/\langle T\rangle \ni \lambda \bmod \langle T\rangle$ は $\lambda(h_1) \bmod 2m$ で定まる。従って (2.3) は

$$\sum_{n \bmod 2m} C^{m-N_1,N_1}_{m-n,n}\ \vartheta_{n,m}=\frac{\vartheta_{N_1+1,m+2}-\vartheta_{-(N_1+1),m+2}}{\vartheta_{1,2}-\vartheta_{-1,2}} \quad \text{---- (2.4)}$$

となる。

$\mathcal{R}$ を上半平面 $\{\tau \mid \mathrm{Im}\,\tau>0\}$ 上の正則関数全体のなす環とする。$0<m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\widetilde{Th}_m \underset{\mathrm{def.}}{=} \{ f(t,\tau,z) \mid f \text{は}Y\text{上正則な関数で}\ f(t,\tau,z+1)=f(t,\tau,z),\ f(t,\tau,z+\tau)=e^{-2\pi i m(2z+\tau)}f(t,\tau,z),\ f(t+t',\tau,z)=e^{-2\pi i m t'}f(t,\tau,z)\}$$

とおく。$\widetilde{Th}_m$ は $\mathcal{R}$-加群になり，$\widetilde{Th}_m\cdot\widetilde{Th}_n\subset\widetilde{Th}_{m+n}$ となる。$\{\vartheta_{n,m}\}_{n \bmod 2m}$ が $\widetilde{Th}_m$ の $\mathcal{R}$-free base になる。string function はテータ関数の交代和の比をテータ関数で展開した時の係数として得られる。

$\vartheta_{n,m}$ は次の変換公式をもつ.

テータ関数の変換公式

$$\vartheta_{n,m}\left(t+\frac{z^2}{\tau}, -\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{2m}} \sum_{n'=0}^{2m-1} e^{-\frac{\pi i}{m}nn'} \vartheta_{n',m}(t,\tau,z)$$

(2.4) の右辺の分母を $D(t,\tau,z)$ とおけば この変換公式より

$$D\left(t+\frac{z^2}{\tau}, -\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = -i\sqrt{-i\tau}\ D(t,\tau,z)$$

となる事に注意して, (2.4) の両辺にこの変換公式を適用して $\vartheta_{j,m}$ ($j \bmod 2m$) の係数を比較すると, 次の string function に関する変換公式が得られる。

Th.2 ($A_1^{(1)}$ の string function の変換公式)

$m = N_0 + N_1 = n_0 + n_1$ ($N_i \geq 0$) とする。

$$C^{N_0,N_1}_{n_0,n_1}\left(-\frac{1}{\tau}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \frac{1}{\sqrt{m(m+2)}} \sum_{\substack{0 \leq N \leq m \\ n \bmod 2m}} e^{\frac{\pi i n_1 n}{m}} \sin\frac{(N_1+1)(N+1)}{m+2}\pi\ C^{m-N,N}_{m-n,n}(\tau)$$

この変換公式から $\eta(\tau)^3 C^\Lambda_\lambda(\tau)$ は適当な合同部分群に関する weight 1 の cusp form になる事が示される。([6])

Th.2 を用いて, いくつかの string function を計算しよう。

σ は $\langle\,,\rangle$ を不変にし, $b^{N_0 N_1}_{n_0,n_1} = b^{N_1,N_0}_{n_1,n_0}$ より $C^{N_0,N_1}_{n_0,n_1} = C^{N_1,N_0}_{n_1,n_0}$

$C^\Lambda_{w(\lambda)} = C^\Lambda_\lambda$ だから $C^{N_0,N_1}_{n_0,n_1} = C^{N_0,\ N_1}_{-n_0,\ 2n_0+n_1}$. $\lambda \in \max(\Lambda)$ のとき

$\Lambda-\lambda \in Q$ なので $N_1 \not\equiv n_1\ (2)$ なら $c^{N_0\ N_1}_{n_0\ n_1}=0$ に注意する。

$\Lambda \in P_+$, $\lambda \in \max(\Lambda)$ で　$m=\Lambda(c)$, $N_1=\lambda(h_1)$, $n_1=\lambda(h_1)$

$\Lambda-\lambda = k\alpha_0 + l\alpha_1$ とすれば

$$s_\Lambda(\lambda) = \frac{(N_1+1)^2}{4(m+2)} - \frac{n_1^2}{4m} - \frac{1}{8} + k \quad \cdots \quad (2.5)$$

となる。

$m=1$

$c^{10}_{10}(\tau)$　　　$s_\Lambda(\lambda) = -\frac{1}{24}$

$= q^{-\frac{1}{24}}(1+q+2q^2+\cdots\ )$

Th.2 より　$c^{10}_{10}(-\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\substack{N=0,1\\n=0,1}} \sin\frac{N+1}{3}\pi\, c^{1-N,\,N}_{1-n,\,n}(\tau)$

$$= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(c^{10}_{10}+c^{01}_{01}\right)(\tau)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\ c^{10}_{10}(\tau)$$

一方　$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}(1-q+\cdots)$

$$\eta(-\tfrac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\ \eta(\tau)$$

そこで　$A(\tau) = c^{10}_{10}(\tau)\,\eta(\tau)$　とおけば

$$A(\tau+1) = A(\tau), \quad A(-\tfrac{1}{\tau}) = A(\tau)$$

従って $A(\tau)$ は cusp $i\infty$ で高々特異点をもつ $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する modular function。ところが $i\infty$ のまわりで A は正則で $A(i\infty)=1$. よって $A\equiv 1$. 即ち $c^{10}_{10}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)}$ ―(2-I)

特に $b^{10}_{10}(q) = \frac{1}{\varphi(q)}$ だから q^n の係数は n の分割数になる。

$m=2$

	$S_\Lambda(\lambda)$	q-展開
$C^{20}_{20}(\tau)$	$-\frac{1}{16}$	$q^{-\frac{1}{16}}(1+q+3q^2+\cdots\quad)$
$C^{20}_{02}(\tau)$	$\frac{7}{16}$	$q^{\frac{7}{16}}(1+2q+4q^2+7q^3+\cdots$
$C^{11}_{11}(\tau)$	0	$1+2q+4q^2+8q^3+\cdots$

Th.2 から

$$C^{11}_{11}(-\tfrac{1}{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\frac{1}{\sqrt{2}}(C^{20}_{20}-C^{20}_{02})(\tau) \quad \text{--- (a)}$$

$A(\tau) = \dfrac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)^2}$ とおけば

$$A(-\tfrac{1}{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)^2} = q^{-\frac{1}{16}}(1+\cdots\ )$$

$B(\tau) = \dfrac{C^{11}_{11}(\tau)}{A(\tau)}$ は上半平面で正則で.

$B(\tau+1) = B(\tau)$

$B(-\tfrac{1}{\tau}) = B(-\dfrac{1}{\tau+2})$

従って B は

$$\langle \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \rangle = \Gamma_0(2)$$

に関する modular function で, 高々 cusp $i\infty$, 0 で特異点をもつ。ところが $i\infty$, 0 で B は正則で $B(i\infty)=1$

よって $B(\tau)\equiv 1$ 即ち

$$C^{11}_{11}(\tau) = \frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)^2} \quad \text{--- (2-II)}$$

$$D(\tau) = \det\begin{pmatrix} C^{20}_{20} & C^{20}_{11} & C^{20}_{02} \\ C^{11}_{20} & C^{11}_{11} & C^{11}_{02} \\ C^{02}_{20} & C^{02}_{11} & C^{02}_{02}\end{pmatrix} = C^{11}_{11}(C^{20}_{20}+C^{20}_{02})(C^{20}_{20}-C^{20}_{02})(\tau)$$
$$= q^{-\frac{1}{8}}(1+\cdots\ )$$

とおくと Th.2 より

$$D\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{-i\tau}^{3}}\,D(\tau)$$

$E(\tau) = D(\tau)\,\eta(\tau)^3$ とおけば

$$E(\tau+1) = E(\tau), \quad E\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E(\tau)$$

$i\infty$ で $E(i\infty)=1$. 従って $D(\tau) = \dfrac{1}{\eta(\tau)^3}$ —(b)

(a) と (2-II) より

$$(C^{20}_{20}-C^{20}_{02})(\tau) = \frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)^2}$$

(b) とあわせて

$$(C^{20}_{20}+C^{20}_{02})(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau)}$$

従って

$$C^{20}_{20}(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)^2} + \frac{\eta(\tau)}{\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau)}\right)$$

$$C^{20}_{02}(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau)} - \frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)^2}\right)$$

一般に $m>0$ に対して

$\det\left(C^{m-i,\,i}_{m-j,\,j}(\tau)\right)_{0\le i,j\le m} = \dfrac{1}{\eta(\tau)^{m+1}}$ が示される。

C^{10}_{10}, C^{11}_{11} を求めた時と同様にして

$$C^{44}_{62}(\tau) = \frac{\eta(2\tau)\eta(10\tau)}{\eta(\tau)^3} \qquad (2\text{-III})$$

が得られる。

§3 indefinite modular form と string function

3-1 Hecke の indefinite modular form

U：2次元 $\mathbb{R}$-vector space

$\overset{\cup}{L}$： full lattice

B： U上の indefinite な二次形式で $0 \neq {}^{\forall}\gamma \in L$ に対して

$0 \neq B(\gamma,\gamma) \in 2\mathbb{Z}$ となるもの。

L^*：L の Bに関する dual-lattice

$G_0 = \{ g \in O(U,B)^\circ \mid gL = L,\ g_{L^*/L} = id \}$

とする。

$B(\gamma) = l_1(\gamma)\, l_2(\gamma)$　$(l_i \in U^*)$ なる因数分解を1つ固定して　$\mathrm{sign}(\gamma) \underset{def.}{=} \mathrm{sign}(\,l_1(\gamma)\,)$ とおく。

この時　$\mu \in L^*$ に対して

$$\theta_{L,\mu}(\tau) \underset{def.}{=} \sum_{\substack{\gamma \in L+\mu \\ B(\gamma,\gamma)>0 \\ \gamma \bmod G_0}} \mathrm{sign}(\gamma)\, e^{\pi i B(\gamma,\gamma)\tau}$$

を Hecke の indefinite modular form と呼ぶ。

Hecke ([1]) により $\theta_{L,\mu}(\tau)$ は weight 1 の cusp form になる事が知られている。

$\mathbb{Z} \ni m > 0$ に対して次の様な U, L, B, l_1 をとる。

$U = \mathbb{R}^2 \supset L = \mathbb{Z}^2$，　$B(x,y) = 2(m+2)x^2 - 2my^2$

$l_1 = \sqrt{2(m+2)}\,x + \sqrt{2m}\,y$，　$l_2 = \sqrt{2(m+2)}\,x - \sqrt{2m}\,y$.

この時 $L^* = \frac{1}{2(m+2)}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{2m}\mathbb{Z}$

$L^* \ni \mu = (\mu_1, \mu_2)$ $\quad \mu_1 = \frac{M_1}{2(m+2)}$, $\mu_2 = \frac{M_2}{2m}$, $(M_i \in \mathbb{Z})$

に対する $\Theta_{L,\mu}(\tau)$ を $\Theta^m_{(\mu_1,\mu_2)}(\tau)$ と書くことにする。

$a : (x,y) \longmapsto ((m+1)x + my,\ (m+2)x + (m+1)y)$

とおくと $\quad G_0 = \langle a^2 \rangle$ になる。

$F \underset{def.}{=} \{(x,y) \mid -|x| < y \leq |x|\}$

は $\quad U_+ = \{u \in U \mid B(u) > 0\}$ の $G_0' = \langle a \rangle$ に関する

基本領域になる。よって $F \cup aF$ が G_0 に関する U_+ の基本領域に

なる。また F 上では $\operatorname{sign}(x,y) = \operatorname{sign} x$ となる。

従って

$$\Theta^m_{(\mu_1,\mu_2)}(\tau) = \sum_{\substack{-|x| < y \leq |x| \\ (x,y) \equiv (\mu_1,\mu_2) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{or} \equiv \left(\frac{M_1+M_2}{2} - \mu_1, \frac{M_1+M_2}{2} + \mu_2\right) \bmod \mathbb{Z}^2}} \operatorname{sign} x \quad q^{(m+2)x^2 - my^2} \qquad \text{---(3.1)}$$

$$(q = e^{2\pi i \tau})$$

3-2. string function と indefinite modular form

<u>Th.3</u> $\Lambda \in P_+$, $\lambda \in \max(\Lambda)$, $m = \Lambda(c)$, $N_1 = \Lambda(h_1)$, $n_1 = \lambda(h_1)$

とする。この時

$$\eta(\tau)^3 c^\Lambda_\lambda(\tau) = \Theta^m_{\left(\frac{N_1+1}{2(m+2)}, \frac{n_1}{2m}\right)}(\tau)$$

証明）$C=\dfrac{N_1+1}{2(m+2)}$, $D=\dfrac{n_1}{2m}$ とおく。

$N_1 \equiv n_1 \ (2)$ だから (3.1) より示すべき式は

$$\eta(\tau)^3 C A_\lambda(\tau) = \sum_{\substack{-|x|<y\leq|x| \\ (x,y)\equiv(C,D) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{or} \\ \equiv(\frac{1}{2}-C,\frac{1}{2}+D) \bmod \mathbb{Z}^2}} \operatorname{sign} x \quad q^{(m+2)x^2-my^2} \quad \text{---- (3.2)}$$

(3.2) の証明のためにいくつか準備をする。

$n_0 : Q \longrightarrow \mathbb{Z} \ : \beta = k\alpha_0+l\alpha_1 \longmapsto k$ とする。

$t' \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を

$$t'(\lambda) \underset{\text{def.}}{=} \lambda + \frac{\lambda(c)}{2}\alpha_1 - \left\{\frac{\lambda(c)}{4}+\frac{\lambda(h_1)}{2}\right\}\delta$$

と定める。すると $k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$t'^k(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda(c)}{2}k\,\alpha_1 - \left\{\frac{\lambda(c)}{4}k^2+\frac{\lambda(h_1)}{2}k\right\}\delta \quad \text{--(3.3)}$$

特に $t'^2 = t$ となる。

<u>Lemma 2</u> $\Lambda\in P_+$, $\lambda\in \max(\Lambda)$ の時. $m=\Lambda(c)$

$C=\dfrac{\Lambda(h_1)+1}{2(m+2)}$, $D\,\dfrac{\lambda(h_1)}{2m}$ とすると

$$n_0(t'^k(t^n(\Lambda+\rho)-\lambda)-\rho)$$
$$= S_\Lambda(\lambda)+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}B\left(n+\frac{k}{2}+C,\ \frac{k}{2}+D\right) \quad \text{--- (3.4)}$$

$$n_0(t'^k(t^n r_1(\Lambda+\rho)-\lambda)-\rho)$$
$$= S_\Lambda(\lambda)+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}B\left(n+\frac{k}{2}-C,\ \frac{k}{2}+D\right) \quad \text{--- (3.5)}$$

ここで $B(x,y)=2(m+2)x^2-2my^2$

（Lemma 2 の証明）$N_1=\Lambda(h_1)$, $n_1=\lambda(h_1)$ とおく。

$$t'^{k}(t^{n}(\Lambda+\rho)-\lambda)-\rho$$

$$=t'^{2n+k}(\Lambda+\rho)-(\Lambda+\rho)-(t'^{k}(\lambda)-\lambda)+\Lambda-\lambda$$

と(3.3)より

(3.4)の左辺 $=-\{(m+2)(n+\frac{k}{2})^2+(N_1+1)(n+\frac{k}{2})\}$

$$+\{m(\tfrac{k}{2})^2+n_1\tfrac{k}{2}\}+n_0(\Lambda-\lambda)$$

$$=-(m+2)\{(n+\tfrac{k}{2})^2+C\}^2+m(\tfrac{k}{2}+D)^2$$

$$+\underbrace{\frac{(N_1+1)^2}{4(m+2)}-\frac{n_1^2}{4m}+n_0(\Lambda-\lambda)}$$

$\underbrace{\quad}$ と(2.5)を比べて

$$=-\frac{1}{2}B(n+\tfrac{k}{2}+C,\ \tfrac{k}{2}+D)+\delta_\Lambda(\lambda)+\frac{1}{8}$$

= (3.4)の右辺

(3.5)についても同様. (Lemma2の証明終わり.)

$\beta\in Q$ に対して

$$\delta(\beta)\underset{def}{=}\varphi(q)^3\sum_{n\ge 0}K(\beta+n\delta)q^n$$

とおく. ここで K は Kostant の分割関数.

<u>Lemma 3</u> $Q\ni\beta=m_0\alpha_0+m_1\alpha_1$

$m_0\le 0$ 又は $m_1\le 0$ の時

$$\delta(\beta)=\sum_{k\ge 0}(-1)^k q^{-n_0(t'^{k}(\beta+\rho)-\rho)} \quad \text{---(3.6)}$$

$$=-\sum_{k<0}(-1)^k q^{-n_0(t'^{k}(\beta+\rho)-\rho)} \quad \text{---(3.7)}$$

(Lemma 3の証明)　(3.3)より

$$-n_0(t'^k(\beta+\rho)-\rho) = -(k+1)m_0 + k m_1 + \frac{k(k+1)}{2}$$

となる。よって $k+k'=2(m_0-m_1)-1$ のとき

$$n_0(t'^k(\beta+\rho)-\rho) = n_0(t'^{k'}(\beta+\rho)-\rho)$$

従って $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k q^{-n_0(t'^k(\beta+\rho)-\rho)} = 0$

となるので (3.6) と (3.7) は同値な式である。

Th.1 (1.4) より

$$\mathcal{S}(\beta) = \varphi(q)^3 \sum_{s\ge 0}\sum_{k\ge 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)m_0 - k m_1 - \frac{k(k+1)}{2}+s\right) q^s$$

$$= \sum_{k\ge 0}(-1)^k \varphi(q)^3 \sum_{s\ge 0} p^{(3)}\left((k+1)m_0 - k m_1 - \frac{k(k+1)}{2}+s\right) q^s$$

$m_0\le m_1$ よって $m_0\le 0$ のとき $(k+1)m_0 - k m_1 - \frac{k(k+1)}{2} \le 0$ なので

$$\mathcal{S}(\beta) = \sum_{k\ge 0}(-1)^k q^{-(k+1)m_0+k m_1+\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$= \sum_{k\ge 0}(-1)^k q^{-n_0(t'^k(\beta+\rho)-\rho)} = (3.6)\text{の右辺}$$

$m_1\le m_0$ 従って $m_1\le 0$ の時は Th.1 (1.5) を用いて (3.7) が同様に示せる。(Lemma 3 の証明終り)

(3.2)式の証明

左辺 $= q^{s_1(\lambda)+\frac{1}{8}}\varphi(q)^3 \displaystyle\sum_{n\ge 0} m_1(\lambda-n\delta)\, q^n$

各項に Kostant の公式 (1.3) を適用すると

$$= q^{S_\Lambda(\lambda)+\frac{1}{8}} \sum_{w\in W} \det w \ \varphi(q)^3 \sum_{n\geq 0} K(w(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)+n\delta)\, q^n$$

$$= q^{S_\Lambda(\lambda)+\frac{1}{8}} \Big\{ \sum_{n\geq 0} S(t^n(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)) + \sum_{n<0} S(t^n(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho))$$

$$- \sum_{n>0} S(t^n r_1(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)) - \sum_{n\leq 0} S(t^n r_1(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)) \Big\}$$

$\lambda \in \max(\Lambda)$ なので Prop.1 (3)より

$$\forall w \in W \quad w(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)-\delta \notin Q_+$$

よって各項に Lemma3 を適用できる。1,3 項は (3.6), 2,4 項は (3.7) を用いる。例えば 一項目

$$S(t^n(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k q^{-n_0(t'^k(t^n(\Lambda+\rho)-\lambda)-\rho)}$$

$$\overset{\text{Lemma2 (3.4)}}{=} \sum_{k\geq 0} (-1)^k q^{-S_\Lambda(\lambda)-\frac{1}{8}} \ q^{\frac{1}{2}B(n+\frac{k}{2}+C,\ \frac{k}{2}+D)}$$

等となるから

$$((3.2)の左辺) = \Big(\overset{①}{\sum_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 0}}} - \overset{②}{\sum_{\substack{n<0\\ k<0}}} \Big) (-1)^k q^{\frac{1}{2}B(n+\frac{k}{2}+C,\ \frac{k}{2}+D)}$$

$$- \Big(\overset{③}{\sum_{\substack{n>0\\ k\geq 0}}} - \overset{④}{\sum_{\substack{n\leq 0\\ k<0}}} \Big) (-1)^k q^{\frac{1}{2}B(n+\frac{k}{2}-C,\ \frac{k}{2}+D)}$$

①,② $\begin{cases} k' = n+\frac{k}{2} \\ n' = \frac{k}{2} \end{cases}$ ③,④ $\begin{cases} k' = -(n+\frac{k}{2}) \\ n' = \frac{k}{2} \end{cases}$ と変数変換し $B(x,y)=B(-x,y)$ から

$$= \sum_{\substack{k,n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ k \equiv n \bmod \mathbb{Z} \\ k \geqq |n| \text{ or } k < -|n|}} (-1)^{2k} \operatorname{sign}\left(k+\frac{1}{4}\right) q^{\frac{1}{2}B(k+C,\, n+D)}$$

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ の項に分け，$\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ の項を $k \to -k$ と変換

$$= \sum_{\substack{k,n \in \mathbb{Z} \\ k \geqq |n| \\ \text{or } k < -|n|}} \operatorname{sign}\left(k+\frac{1}{4}\right) q^{\frac{1}{2}B(k+C,\, n+D)}$$

$$+ \sum_{\substack{k,n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \\ k > |n| \\ \text{or } k \leqq -|n|}} \operatorname{sign}\left(k-\frac{1}{4}\right) q^{\frac{1}{2}B(k-C,\, n+D)} \qquad \text{———}(*)$$

$0 < C < \frac{1}{2}$, $0 \leqq D \leqq \frac{1}{2}$ から $0 < C+D < 1$, $|C-D| < \frac{1}{2}$

$C \geqq D$ のとき

一項目 $\begin{cases} x = k+C \\ y = n+D \end{cases}$ 二項目 $\begin{cases} x = k-C \\ y = n+D \end{cases}$ と変換する

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \equiv (C,D) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{かつ} \\ \begin{cases} x-C \geqq |y-D| \\ \text{or} \\ x-C < -|y-D| \end{cases} \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} (x,y) \equiv (C,D) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{かつ} \\ -|x| < |y| \leqq |x| \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \equiv (\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{かつ} \\ \begin{cases} x+C \geqq |y-D| \\ \text{or} \\ x+C < -|y-D| \end{cases} \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} (x,y) \equiv (\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D) \bmod \mathbb{Z}^2 \\ \text{かつ} \\ -|x| < |y| \leqq |x| \end{array}$$

より $(*) = (3.2)$ の右辺。即ち $\eta(\tau)^3 C^A_\lambda(\tau) = \theta^m_{(C,D)}(\tau)$

$C < D$ の時

$$C^{N_0 N_1}_{n_0 n_1} = C^{N_1 N_0}_{n_1 n_0}$$

$$C' = \frac{N_0+1}{2(m+2)} \quad , \quad D' = \frac{n_0+1}{2m}$$

とすれば　$C+C' = D+D' = \frac{1}{2}$ より　$C' > D'$

従って

$$\eta(\tau)^3 C^{N_0 N_1}_{n_0 n_1}(\tau) = \eta(\tau)^3 C^{N_1 N_0}_{n_1 n_0}(\tau)$$

$$= \theta^m_{(C', D')}(\tau)$$

$C' \not\equiv \pm D' \bmod \mathbb{Z}$ だから

$$= \theta^m_{(C', -D')}(\tau)$$

$$= \theta^m_{(\frac{1}{2}-C, D-\frac{1}{2})}(\tau)$$

$$= \theta^m_{(\frac{1}{2}-C, \frac{1}{2}+D)}(\tau)$$

$$= \theta^m_{(C,D)}(\tau)$$

（定理の証明終り）

3-3. 等式 (I), (II), (III)

(2-I), (2-II), (2-III) より

$$\eta(12\tau)^3 C^{1\,0}_{1\,0}(12\tau) = \eta(12\tau)^2$$

$$\eta(8\tau)^3 C^{1\,1}_{1\,1}(8\tau) = \eta(8\tau)\eta(16\tau)$$

$$\eta(2\tau)^3 C^{4\,4}_{6\,2}(2\tau) = \eta(4\tau)\eta(20\tau)$$

Th.3より これらの左辺は それぞれ

$$\sum_{\substack{\left\{\begin{array}{l} k\equiv 1\ (6) \\ l\equiv 0\ (2)\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} k\equiv 2\ (6) \\ l\equiv 1\ (2)\end{array}\right. \\ -|k|<3l\leq |k|}} \operatorname{sign} x\, q^{k^2-3l^2} \qquad \text{---- (3-I)}$$

$$\sum_{\substack{k\equiv 1(4)\\ l\equiv 1(2)\\ -|k|<l\leq |k|}} \operatorname{sign} k \quad q^{2k^2-l^2} \qquad \text{---} \quad (3\text{-}\mathrm{II})$$

$$\sum_{\substack{k\equiv 1(4)\\ l\equiv 1(4)\\ -2|k|<l\leq 2|k|}} \operatorname{sign} k \quad q^{\frac{5k^2-l^2}{4}} \qquad \text{---} \quad (3\text{-}\mathrm{III})$$

(3-I), (3-II), (3-III) がそれぞれ(I), (II), (III) の右辺に等しい事を示せばよい。

(3-I)

$$\begin{cases} i = k+l \\ j = k+3l \end{cases} \quad \text{と変換すると} \quad k^2-3l^2 = \frac{3i^2-j^2}{2}$$

$$(3\text{-}\mathrm{I}) = \sum_{\substack{i=2a+1\\ j=6b\pm 1\\ a\equiv b(2)\\ -|3i-j|<3(j-i)\leq |3i-j|}} \operatorname{sign}(3i-j)\, q^{\frac{3i^2-j^2}{2}}$$

$$= \Big(\sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ 0\leq 2b\leq a}} - \sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ a<2b<0}}\Big)\, q^{\frac{3(2a+1)^2-(6b+1)^2}{2}}$$

$$+ \Big(\sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ 0<2b\leq a}} - \sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ a<2b\leq 0}}\Big)\, q^{\frac{3(2a+1)^2-(6b-1)^2}{2}}$$

後の二項 $b \to -b$ と変換

$$= \Big(\sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ 0\leq 2|b|\leq a}} - \sum_{\substack{a\equiv b(2)\\ a<-2|b|\leq 0}}\Big)\, q^{\frac{3(2a+1)^2-(6b+1)^2}{2}}$$

後の項 $a' = -a+1$ と変換

$$= \Big(\sum_{\substack{a \equiv b (2) \\ 2|b| \leq a}} - \sum_{\substack{a \not\equiv b (2) \\ 2|b| < a}} \Big) q^{\frac{3(2a+1)^2 - (6l+1)^2}{2}}$$

$$= \sum_{\substack{2|k| \leq l \\ k,l \in \mathbb{Z}}} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2 - (6l+1)^2}{2}}$$

(3-II)

$$= \Big(\sum_{\substack{k \equiv 1 (4) \\ l \equiv 1 (4) \\ -|k| < l \leq |k|}} + \sum_{\substack{k \equiv 1 (4) \\ l \equiv -1 (4) \\ -|k| < l \leq |k|}} \Big) \operatorname{sign} k \, q^{2k^2 - l^2}$$

一項目 $\begin{cases} i = 2k - l \\ j = \dfrac{k-l}{4} \end{cases}$　二項目 $\begin{cases} i = 2k + l \\ j = \dfrac{k+l}{4} \end{cases}$ と変換

どちらの変換でも $2k^2 - l^2 = i^2 - 32j^2$

一項目 $\displaystyle\sum_{\substack{i \equiv 1 (4) \\ 0 \leq 6j < i \\ \text{or} \\ i < 6j < 0}} \operatorname{sign} i \, q^{i^2 - 32j^2}$

$$= \sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 \leq 6j < 4a+1}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+3) \leq 6j < 0}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

二項目

$$\sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 < 6j \leq 4a+1}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+3) < 6j \leq 0}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

$$\stackrel{j \to -j}{=} \sum_{\substack{a \geq 0 \\ -(4a+1) \leq 6j < 0}} q^{(4a+1)^2 - 32j^2} - \sum_{\substack{a \geq 0 \\ 0 \leq 6j < (4a+3)}} q^{(4a+3)^2 - 32j^2}$$

全てまとめて

$$(3\text{-}\mathrm{II}) = \sum_{3|j|\le k} (-1)^k q^{(2k+1)^2-32j^2}$$

$$(3\text{-}\mathrm{III})$$

$$= \sum_{\substack{a\ge 0 \\ -2(4a+1)<l\le 2(4a+1) \\ l\equiv 1\,(4)}} q^{\frac{5(4a+1)^2-l^2}{4}} - \sum_{\substack{a\ge 0 \\ -2(4a+3)<l\le 2(4a+3) \\ l\equiv 1\,(4)}} q^{\frac{5(4a+1)^2-l^2}{4}}$$

$$= \sum_{\substack{k\ge 0 \\ -2(2k+1)<l<2(2k+1) \\ l\equiv 1\,(4)}} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2-l^2}{4}} = \sum_{0\le l\le 2k} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2-(2l+1)^2}{4}}$$

[付記]

§2の string function の理論は一般の affine Lie 環についても展開される。[6]では $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ の Kostant 分割関数も計算している。$A_l^{(1)}$ についても研究している。$A_1^{(1)}$ 以外の string function の例については，脇本氏，三輪-神保氏の記事を参照されたい。脇本氏（[9], [10]）は特殊化された指標の積公式を用いて string function の計算を行っている。三輪-神保氏（[2]）は affine Lie 環の pair $\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{g}_2$ に関する standard module の分岐則に indefinite modular form が現われてくる事を発見した。

参考文献

[1] E. Hecke : Über eine neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen, Mathematische Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1959), 418–427

[2] M. Jimbo and T. Miwa : Irreducible decomposition of fundamental modules for $A_\ell^{(1)}$ and $C_\ell^{(1)}$, and Hecke modular forms, RIMS preprint 434

[3] —— : On a duality of branching rules for affine Lie algebras, RIMS preprint 453

[4] V. G. Kac : Infinite dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. in Math. 30 (1978), 85–136

[5] V. G. Kac and D. H. Peterson : Affine Lie algebras and Hecke modular forms, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980), 1057–1061

[6] —— : Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, Adv. in Math. (to appear)

[7] J. Lepowsky : Kac-Moody Lie algebras, Paris VI Lecture (1978)

[8] R. Moody : A new class of Lie algebras, J. of alg. 10 (1968), 211-230

[9] M. Wakimoto : Two formulae for specialized characters of Kac-Moody Lie algebras, preprint

[10] —— : A note on fundamental representations of an affine Lie algebra $C_2^{(1)}$, preprint

[11] 岩堀-横沼 : Kac-Moody Lie環とMacdonald恒等式, 数学 33巻 (1981), 193-212

[12] 小池-徳山-田中 : Kac-Moody Lie環の代数的側面 I, II, III, 「表現論とその周辺」シンポジウム報告集 (1982), 43-106